Міністерство освіти і науки України

Кременчуцький національний університет   
імені Михайла Остроградського

Навчально-науковий інститут електричної інженерії   
та інформаційних технологій

Кафедра автоматизації та інформаційних систем

НаВчальна дисципліна  
«**«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ  
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»**»

Звіт

З практичної роботи №4

Виконав

студент групи КН-24-1

Озівський В.В.

Перевірив

доцент кафедри КІЕ

Сидоренко В. М.

Кременчук 2025

|  |  |
| --- | --- |
| Тема: | Схема Бернуллі. |
| Мета: | набути практичних навичок у розв’язанні типових задач в рамках схеми Бернуллі. |

Хід роботи

**Задача 18:**

**Умова:** n = 5000 абонентів, p = 0.01.

Оскільки n велике, а p мале, це задача на розподіл Пуассона.

Спочатку знайдемо параметр λ (лямбда), який є середньою кількістю запитів:

λ = n \* p = 5000 \* 0.01 = 50.

а) Найбільш ймовірна кількість запитів (k₀):

Для розподілу Пуассона найбільш ймовірне число k₀ знаходиться в межах:

λ - 1 ≤ k₀ ≤ λ

50 - 1 ≤ k₀ ≤ 50 => 49 ≤ k₀ ≤ 50.

Отже, найбільш ймовірних значень два: 49 і 50.

б) Ймовірність найбільш ймовірної кількості запитів (P(50)):

Використовуємо формулу Пуассона: P(k) = (λ^k \* e^(-λ)) / k!

P(50) = (50^50 \* e^(-50)) / 50!

Це складне обчислення, для якого використовують асимптотичну формулу Стірлінга або калькулятори. Результат:

P(50) ≈ 0.0563.

(Ймовірність для k=49 буде майже такою ж).

в) Ймовірність того, що надійде 100 запитів (P(100)):

P(100) = (50^100 \* e^(-50)) / 100!

Це дуже мала ймовірність, оскільки 100 значно відхиляється від середнього значення 50.

P(100) ≈ 1.37 \* 10^(-12) (практично нуль).

г) Ймовірність того, що надійде не більше 5 запитів (P(k ≤ 5)):

Це сума ймовірностей: P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5).

P(k ≤ 5) = e^(-50) \* (50^0/0! + 50^1/1! + ... + 50^5/5!)

Оскільки λ=50 дуже велике, а k=5 дуже мале, ця ймовірність буде надзвичайно низькою, практично нульовою.

P(k ≤ 5) ≈ 1.95 \* 10^(-16).

**Відповідь:**

а) 49 або 50 запитів.

б) ≈ 0.0563.

в) ≈ 1.37 \* 10⁻¹² (дуже близька до нуля).

г) ≈ 1.95 \* 10⁻¹⁶ (дуже близька до нуля).

**Задача 19:**

**Умова:** n = 100 випробувань (з поверненням). Всього деталей 10 (7 стандартних, 3 бракованих).

Ймовірність взяти стандартну деталь: p = 7/10 = 0.7.

Ймовірність взяти браковану: q = 1 - p = 0.3.

Оскільки n велике, використовуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

а) Стандартна деталь з’явиться 70 разів (k=70):

Використовуємо локальну теорему Муавра-Лапласа:

P(n, k) ≈ (1 / √(n\*p\*q)) \* φ(x), де x = (k - n\*p) / √(n\*p\*q).

n\*p = 100 \* 0.7 = 70.

√(n\*p\*q) = √(100 \* 0.7 \* 0.3) = √(21) ≈ 4.58.

x = (70 - 70) / 4.58 = 0.

З таблиці значень функції Гаусса φ(0) ≈ 0.3989.

P(100, 70) ≈ (1 / 4.58) \* 0.3989 ≈ 0.0871.

б) Стандартна деталь з’явиться від 65 до 80 разів (k₁=65, k₂=80):

Використовуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

P(k₁, k₂) ≈ Φ(x₂) - Φ(x₁).

x₁ = (k₁ - n\*p) / √(n\*p\*q) = (65 - 70) / 4.58 = -5 / 4.58 ≈ -1.09.

x₂ = (k₂ - n\*p) / √(n\*p\*q) = (80 - 70) / 4.58 = 10 / 4.58 ≈ 2.18.

З таблиці значень функції Лапласа Φ(x):

Φ(2.18) ≈ 0.4854.

Φ(-1.09) = -Φ(1.09) ≈ -0.3621.

P(65, 80) ≈ 0.4854 - (-0.3621) = 0.4854 + 0.3621 = 0.8475.

**Відповідь:**

а) ≈ 0.0871.

б) ≈ 0.8475.

**Задача 20:**

**Умова:** n = 4 кидки, p = 0.9 (ймовірність влучення).

Оскільки n мале, використовуємо формулу Бернуллі:

P(n, k) = C(n, k) \* p^k \* q^(n-k).

q = 1 - p = 0.1.

Кількість влучень дорівнює трьом (k=3):

P(4, 3) = C(4, 3) \* (0.9)^3 \* (0.1)^(4-3) = 4 \* 0.729 \* 0.1 = 0.2916.

Кількість влучень не більше трьох (k ≤ 3):

Простіше знайти ймовірність протилежної події (всі 4 влучення) і відняти її від 1.

P(k=4) = C(4, 4) \* (0.9)^4 \* (0.1)^0 = 1 \* 0.6561 \* 1 = 0.6561.

P(k ≤ 3) = 1 - P(k=4) = 1 - 0.6561 = 0.3439.

Найбільш ймовірне число влучень (k₀):

n\*p - q ≤ k₀ ≤ n\*p + p

4\*0.9 - 0.1 ≤ k₀ ≤ 4\*0.9 + 0.9

3.5 ≤ k₀ ≤ 4.5

Єдине ціле число в цьому проміжку – 4. Отже, k₀ = 4.

Ймовірність цієї події ми вже знайшли: P(4) = 0.6561.

**Відповідь:**

Ймовірність трьох влучень: 0.2916.

Ймовірність не більше трьох влучень: 0.3439.

Найбільш ймовірне число влучень – 4, його ймовірність 0.6561.

**Задача 21:**

**Умова:** p = 0.6, ε = 0.001 (максимальне відхилення), P = 0.99 (задана ймовірність).

Використовуємо наслідок з теореми Муавра-Лапласа (нерівність Чебишова для відносної частоти):

P(|m/n - p| ≤ ε) ≈ 2\*Φ(ε \* √(n/pq)).

Нам дано, що ця ймовірність дорівнює 0.99.

2\*Φ(x) = 0.99 => Φ(x) = 0.495.

З таблиці значень функції Лапласа знаходимо, що Φ(x) = 0.495 при x ≈ 2.58.

Отже, аргумент функції Лапласа дорівнює 2.58:

ε \* √(n/pq) = 2.58

0.001 \* √(n / (0.6 \* 0.4)) = 2.58

√(n / 0.24) = 2.58 / 0.001 = 2580

n / 0.24 = 2580² = 6656400

n = 6656400 \* 0.24 = 1597536.

**Відповідь:** Необхідно провести 1597536 випробувань.

**Задача 22:**

**Умова:** n = 225 кидків. Ймовірність герба p = 0.5, q = 0.5.

Використовуємо теореми Муавра-Лапласа.

n\*p = 225 \* 0.5 = 112.5.

√(n\*p\*q) = √(225 \* 0.5 \* 0.5) = √(56.25) = 7.5.

Герб випадає 110 разів (k=110):

Локальна теорема: P(n, k) ≈ (1 / √(n\*p\*q)) \* φ(x).

x = (110 - 112.5) / 7.5 = -2.5 / 7.5 ≈ -0.33.

φ(-0.33) = φ(0.33) ≈ 0.3778.

P(225, 110) ≈ (1 / 7.5) \* 0.3778 ≈ 0.0504.

Герб випадає від 110 до 200 разів (k₁=110, k₂=200):

Інтегральна теорема: P(k₁, k₂) ≈ Φ(x₂) - Φ(x₁).

x₁ = (110 - 112.5) / 7.5 ≈ -0.33.

x₂ = (200 - 112.5) / 7.5 = 87.5 / 7.5 ≈ 11.67.

Φ(11.67) ≈ 0.5 (бо аргумент дуже великий).

Φ(-0.33) = -Φ(0.33) ≈ -0.1293.

P(110, 200) ≈ 0.5 - (-0.1293) = 0.5 + 0.1293 = 0.6293.

**Відповідь:**

Ймовірність, що герб випаде 110 разів: ≈ 0.0504.

Ймовірність, що герб випаде від 110 до 200 разів: ≈ 0.6293.

Контрольні питання

1. Дати визначення схеми випробувань Бернуллі.

Відповідь: Схема випробувань Бернуллі – це математична модель, що описує послідовність незалежних випадкових експериментів, кожен з яких має лише два можливі наслідки: "успіх" або "невдача". Ймовірність "успіху" є однаковою в кожному випробуванні.

1. Які властивості має випадковий експеримент за схемою Бернуллі?

Відповідь:

Дихотомія: Кожне випробування має рівно два можливі наслідки (успіх/невдача, так/ні, влучив/промахнувся).

Незалежність: Результат будь-якого випробування не залежить від результатів усіх попередніх.

Сталість ймовірності: Ймовірність "успіху" (p) залишається незмінною для всіх випробувань у серії.

1. Що загального і в чому відмінність схеми випробувань Бернуллі від схеми, що описується гіпергеометричним розподілом?

Відповідь:

Загальне: Обидві схеми описують експерименти з двома можливими наслідками (успіх/невдача) і використовуються для знаходження ймовірності певної кількості успіхів у серії випробувань.

Відмінність:

Схема Бернуллі передбачає незалежність випробувань. Це відповідає вибірці з поверненням, коли склад генеральної сукупності не змінюється. Ймовірність успіху p є сталою.

Гіпергеометричний розподіл описує залежні випробування. Це відповідає вибірці без повернення, коли кожен наступний вибір змінює склад сукупності, що залишилася. Ймовірність успіху змінюється від кроку до кроку.

1. Як визначається ймовірність отримати k успіхів у n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі?

Відповідь: Ця ймовірність визначається за формулою Бернуллі:

P(n, k) = C(n, k) \* p^k \* q^(n-k)

де:

C(n, k) – кількість способів вибрати k успішних випробувань з n.

p – ймовірність успіху в одному випробуванні.

q – ймовірність невдачі в одному випробуванні (q = 1 - p).

k – кількість успіхів.

n – загальна кількість випробувань.

5. Навести приклади випадкових експериментів, які можна моделювати за допомогою схеми Бернуллі.

Відповідь:

Кидання монети: Серія з n кидків монети, де "успіх" – випадання герба.

Контроль якості: Перевірка n деталей з великої партії, де "успіх" – деталь є стандартною (припускається, що вибірка не впливає на загальний відсоток браку).

Стрільба: n пострілів по мішені одним стрільцем, де "успіх" – влучення в ціль.

Маркетинг: n телефонних дзвінків клієнтам, де "успіх" – клієнт погоджується на пропозицію.